

Exercice n°1 : Questions de cours (6 points)

En utilisant la méthode de différence finis résoudre le problème à 1D régi par l'équation ci-dessous et faire une comparaison avec la solution analytique:

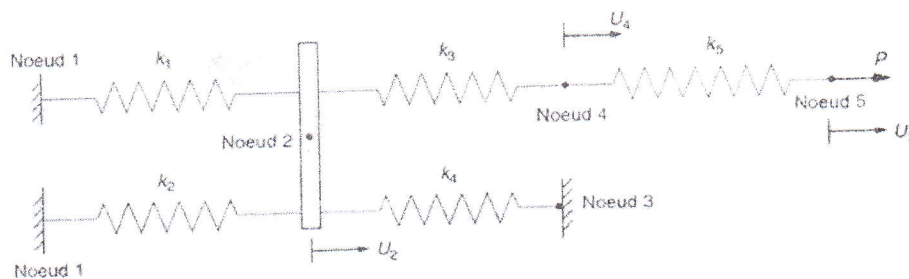
$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = \frac{x}{y(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0,1]$$

Notes :

1. Utilise la discrétisation du domaine $\Delta x = 0.25$
2. On donne la solution analytique $y(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

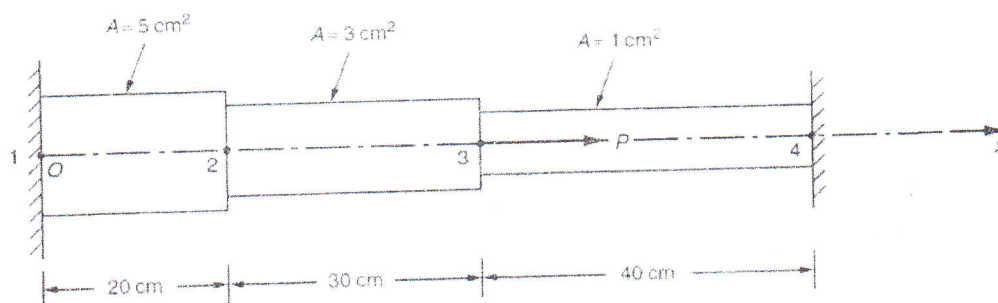
Exercice n°2 : (6 points)

Cinq ressorts, ayant des raideurs $k_1 = 10^5 \text{ N/m}$, $k_2 = 2 \times 10^5 \text{ N/m}$, $k_3 = 3 \times 10^5 \text{ N/m}$, $k_4 = 4 \times 10^5 \text{ N/m}$, and $k_5 = 5 \times 10^5 \text{ N/m}$, sont connectés en parallèle et en série et soumises à une charge $P = 1000 \text{ N}$ au nœud 5 comme le montre dans la Figure ci-dessous. En utilisant la méthode des éléments finis, déterminer les déplacements des nœuds 2, 4 et 5.



Exercice n°3 : (8 points)

Une barre étagée est soumise à une charge axiale de $P = 2000 \text{ N}$ comme le montre la Figure ci-dessous. Si le matériau de la barre étagée est de l'acier avec un module d'Young de $207 \times 10^9 \text{ Pa}$, trouver les contraintes développées dans chacune des étapes.

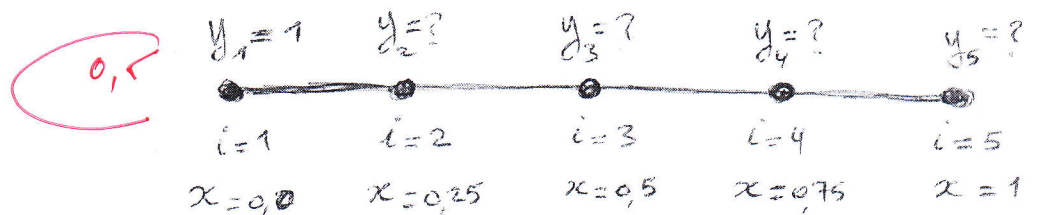


Ex: 01 (6 points)

Résoudre le problème 1D par la méthode des différences finies:

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = \frac{x}{y(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

1) Discrétisation du domaine:



en prend une approximation à gauche nous donne:

$$\frac{(y_i - y_{i-1})}{\Delta x} = \frac{x_i}{y_i} \Leftrightarrow \frac{(y_i - y_{i-1})}{\Delta x} y_i - x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow y_i^2 - y_{i-1} y_i - \Delta x \cdot x_i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i=1 \rightarrow y_1 = 1 \\ i=2 \rightarrow y_2^2 - y_1 y_2 - \Delta x x_2 = 0 \\ i=3 \rightarrow y_3^2 - y_2 y_3 - \Delta x x_3 = 0 \\ i=4 \rightarrow y_4^2 - y_3 y_4 - \Delta x x_4 = 0 \\ i=5 \rightarrow y_5^2 - y_4 y_5 - \Delta x x_5 = 0 \end{cases}$$

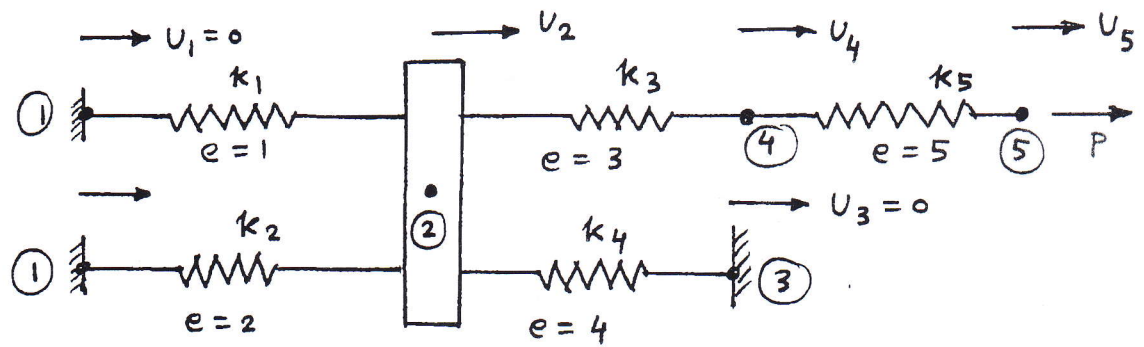
$$\Rightarrow \begin{cases} i=1 \rightarrow y_1 = 1 \\ i=2 \rightarrow y_2^2 - y_1 y_2 - 0,25 \times 0,25 = 0 \\ i=3 \rightarrow y_3^2 - y_2 y_3 - 0,25 \times 0,5 = 0 \\ i=4 \rightarrow y_4^2 - y_3 y_4 - 0,25 \times 0,75 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i=1 \longrightarrow y_1 = 1,0000 \\ i=2 \longrightarrow y_2 = 1,0590 \\ i=3 \longrightarrow y_3 = 1,1662 \\ i=4 \longrightarrow y_4 = 1,3094 \\ i=5 \longrightarrow y_5 = 1,4785 \end{array} \right. \quad (1)$$

... Comparaison :

x_i	T_i (Analytique)	T_i (Numérique)	Erreur %
$x = 0$	$y_1 = 1,0000$	$y_1 = 1,0000$	/
$x = 0,25$	$y_2 = 1,0308$	$y_2 = 1,0590$	$\approx 3\%$
$x = 0,5$	$y_3 = 1,1180$	$y_3 = 1,1662$	$\approx 4\%$
$x = 0,75$	$y_4 = 1,2500$	$y_4 = 1,3094$	$\approx 4\%$
$x = 1$	$y_5 = 1,4142$	$y_5 = 1,4785$	$\approx 5\%$

Ex. n° 2



Element stiffness matrices:

$$[k^{(1)}] = 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \quad \text{N/m}$$

$$[k^{(2)}] = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \quad \text{N/m}$$

$$[k^{(3)}] = 3 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_4 \end{matrix} \quad \text{N/m}$$

$$[k^{(4)}] = 4 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \end{matrix} \quad \text{N/m}$$

$$[k^{(5)}] = 5 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_4 \\ u_5 \end{matrix} \quad \text{N/m}$$

Assembled stiffness matrix of the system:

$$[K] = 10^5 \begin{bmatrix} 1+2 & -1-2 & 0 & 0 & 0 \\ -1-2 & 1+2+3+4 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3+5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{matrix} \quad \text{N/m}$$

system equilibrium equations (before applying the boundary conditions):

$$10^5 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ P_3 \\ 0 \\ P_5 = 1000 \end{Bmatrix}$$

1

system equations (after using the known boundary conditions, $U_1 = U_3 = 0$):

$$10^5 \begin{bmatrix} 10 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

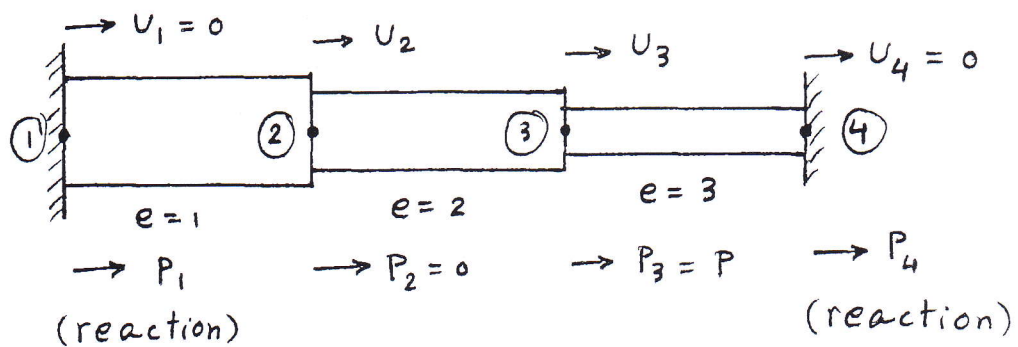
1 (1)

Solution of Eqs. (1):

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.001428 \\ 0.004762 \\ 0.006762 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

1.1 (2)

Ex. n°3



Element stiffness matrices:

$$A_1 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2, E_1 = 207 \times 10^9 \text{ Pa}, l_1 = 0.2 \text{ m}$$

$$\frac{A_1 E_1}{l_1} = \frac{(5 \times 10^{-4})(207 \times 10^9)}{0.2} = 517.5 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$[K^{(1)}] = 517.5 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

$$\frac{A_2 E_2}{l_2} = \frac{(3 \times 10^{-4})(207 \times 10^9)}{0.3} = 207.0 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$[K^{(2)}] = 207.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

$$A_3 = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2, E_3 = 207 \times 10^9 \text{ Pa}, l_3 = 0.4 \text{ m}$$

$$\frac{A_3 E_3}{l_3} = \frac{(1 \times 10^{-4})(207 \times 10^9)}{0.4} = 51.75 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$[K^{(3)}] = 51.75 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

Assembled stiffness matrix:

$$[K] = 10^6 \begin{bmatrix} 517.5 & -517.5 & 0 & 0 \\ -517.5 & 517.5 + 207.0 & -207.0 & 0 \\ 0 & -207.0 & 207.0 + 51.75 & -51.75 \\ 0 & 0 & -51.75 & 51.75 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

system equilibrium before applying boundary conditions:

$$10^6 \begin{bmatrix} 517.5 & -517.5 & 0 & 0 \\ -517.5 & 724.5 & -207.0 & 0 \\ 0 & -207.0 & 258.75 & -51.75 \\ 0 & 0 & -51.75 & 51.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ 2000 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

system equilibrium equations after incorporating the boundary conditions $U_1 = U_4 = 0$ (by deleting rows and columns 1 and 4 in above equations):

$$10^6 \begin{bmatrix} 724.5 & -207.0 \\ -207.0 & 258.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2000 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Solution of Eq. (1):

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0.0286 \\ 0.1002 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

stress in element (step) 1:

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_1 = E_1 \left(\frac{U_2 - U_1}{l_1} \right) = 207 \times 10^9 \left(\frac{0.0286 - 0}{0.2} \right) 10^{-4} \\ = 2.9601 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

Stress in element (step) 2:

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_2 = E_2 \left(\frac{U_3 - U_2}{l_2} \right) = 207 \times 10^9 \left(\frac{0.1002 - 0.0286}{0.3} \right) 10^{-4} \\ = 4.9404 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

stress in element (step) 3:

$$\sigma_3 = E_3 \epsilon_3 = E_3 \left(\frac{U_4 - U_3}{l_3} \right) = 207 \times 10^9 \left(\frac{0 - 0.1002}{0.4} \right) 10^{-4} \\ = -5.1853 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$